

1.3.7 Řešení slovních úloh pomocí Vennových diagramů II

Předpoklady: 010306

Pedagogická poznámka: Ideální je, pokud tato hodina vyjde na cvičení. Postup žáků je totiž velmi individuální a dělají velké množství chyb, oběhat celou třídu je daleko obtížnější, než když máte studentů polovinu. Pokud učíte v celé třídě, vyplatí se připravit si dva, tři pomocné papíry s rovnicemi a výsledky, aby si žáci, které nestihnete kontrolovat, mohli kontrolovat sami. Zároveň se ale musí trasovat na tabuli tak, aby se pro rychlejší část třídy, která bude řešit příklad 3, podařilo tento příklad na tabuli dokončit. Kromě prvního příkladu by měli studenti postupovat zcela samostatně s tím, že jim dáte ke kontrole výsledky a budete jim kontrolovat sestavené rovnice. Pokud najdu chybu, hlásím, ve které rovnici ji má, samotnou chybu by měl žák najít samostatně.

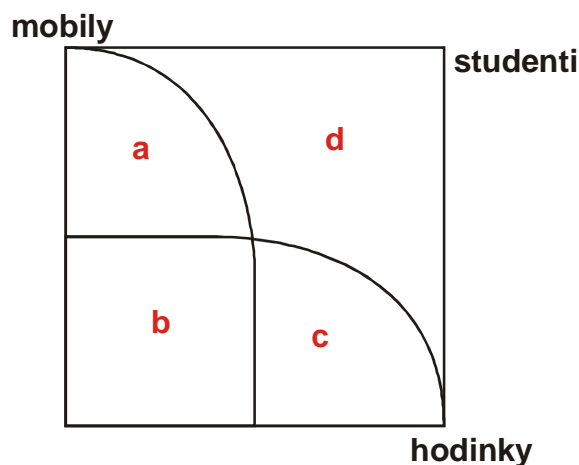
Problémy z minulé hodiny:

- spojka nebo - mezi žáky, kteří mají jedničku z matematiky nebo fyziky patří i ti, kteří mají jedničku z obou předmětů,
- sestavování rovnic - postupně procházíme text, každé slovo má svůj význam.

Nejhorší typ rovnic v příkladech s Vennovými diagramy: rovnice, ve kterých porovnáváme počty prvků dvou množin (žáků, kteří navštívili alespoň jeden koncert, bylo dvakrát více než žáků, kteří navštívili jen první koncert), postupujeme ve dvou krocích:

- zapíšeme obě množiny, které srovnáváme, na dvě strany rovnosti,
- rozmyslíme, která z množin je větší a jak tedy musíme rovnost doplnit násobením (sčítáním, odčítáním, dělením).

- Př. 1:** Studenti se chlubili a zjišťovali, kdo má mobilní telefony s GPS a kdo hodinky s vodotryskem. Výsledky zanesli do Vennova diagramu. Zapiš pomocí rovnic a písmenek z Vennova diagramu následující věty:
- Studentů, kteří mají pouze mobilní telefon, je o 15 více než studentů, kteří mají pouze hodinky s vodotryskem.
 - Studentů, kteří mají mobilní telefon i hodinky s vodotryskem, je o 12 méně než studentů s mobilním telefonem.
 - Pouze čtvrtina studentů, kteří mají mobilní telefon, má i hodinky s vodotryskem.
 - Studentů, kteří mají alespoň jedno zařízení, je šestkrát více než studentů, kteří nemají nic.
 - Studentů, kteří mají právě jednu věc, je o dva více než studentů, kteří žádnou ze zjišťovaných věcí nemají.
 - Vlastnictví mobilu je třikrát častější než vlastnictví hodinek s vodotryskem.



- a) Studentů, kteří mají pouze mobilní telefon, je o 15 více než studentů, kteří mají pouze hodinky s vodotryskem.

Rovnici sestavíme postupně.

Studentů, kteří mají pouze mobilní telefon ... a

Studentů, kteří mají pouze hodinky s vodotryskem ... c

Studentů s mobilem je více \Rightarrow musíme přičítat k počtu studentů s hodinkami \Rightarrow

$$a = c + 15.$$

- b) Studentů, kteří mají mobilní telefon i hodinky s vodotryskem, je o 12 méně než studentů s mobilním telefonem.

$$b + 12 = a + b$$

- c) Pouze čtvrtina studentů, kteří mají mobilní telefon, má i hodinky s vodotryskem.

$$\frac{a+b}{4} = b$$

- d) Studentů, kteří mají alespoň jedno zařízení, je šestkrát více než studentů, kteří nemají nic.

$$a + b + c = 6d$$

- e) Studentů, kteří mají právě jednu věc, je o dva více než studentů, kteří žádnou ze zjišťovaných věcí nemají.

$$a + c = d + 2$$

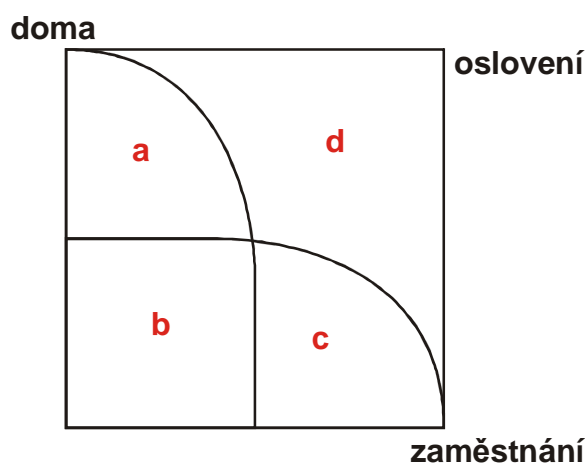
- f) Vlastnictví mobilu je třikrát častější než vlastnictví hodinek s vodotryskem.

$$a + b = 3(b + c)$$

Pedagogická poznámka: Kromě náhodných chyb se při řešení následujících příkladů objeví tyto problémy:

- a) žák není schopen vůbec samostatně zahájit řešení příkladu. Pokud se účastnil předchozí hodiny, je to velmi vážný ukazatel toho, že i když je výuce přítomen, tak ji moc nevnímá a hlavně si není schopen z ní cokoli pamatovat. I když je to pro mě osobně velmi těžko představitelné, existuje značné množství studentů, kteří jeden den příklady řeší a druhý den nejsou schopni ani rámcově zopakovat metodu. Pokud někoho takového objevíte, musíte se snažit ho přesvědčit, aby paměť zapojoval vždy, když něco dělá. Bez zásadní změny v této oblasti nemají takoví studenti příliš šancí v matematice uspět.
- b) část žáků dokáže sestavit rovnice ve Vaší přítomnosti, ale jakmile pracují sami, jsou zoufale neúspěšní. Docela dlouho mně trvalo, než jsem si všiml, že většinou vůbec nekoukají na obrázek, podle kterého by měli rovnice sestavovat. Jakmile začali obrázek více používat, hned byli daleko úspěšnější.
- c) další část neúspěšných sestaví správně rovnice, ale nedokáže je vyřešit. Jde z 99% o důsledek nepřehledného zápisu. Snažím se je donutit, aby tolik nešetřili místem, vypisovali, co už znají, a postupovali systematicky.

- Př. 2:** Z 825 oslovených osob 380 uvedlo, že používá počítač doma nebo v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání, a je o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání. Kolik oslovených osob používá počítač:
- a) pouze v zaměstnání, b) doma?



$$\text{Z 825 oslovených osob} \Rightarrow a + b + c + d = 825 .$$

$$\text{380 používá počítač doma nebo v zaměstnání} \Rightarrow a + b + c = 380 .$$

$$\text{Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání} \Rightarrow a + b = 2b .$$

$$\text{Počet osob, které používají počítač doma, je o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání} \Rightarrow a + b + 40 = c .$$

Získali jsme soustavu rovnic.

$$a + b + c + d = 825$$

$$a + b + c = 380$$

$$a + b = 2b$$

$$a + b + 40 = c$$

Dosadíme za $a+b+c$ do první rovnice: $380+d=825 \Rightarrow d=445$.

Upravíme třetí rovnici: $a+b=2b \Rightarrow a=b$ a dosadíme do druhé a čtvrté.

$$a+a+c=380 \Rightarrow 2a+c=380$$

$$a+a+40=c \Rightarrow 2a+40=c$$

Dosadíme za c do upravené druhé rovnice: $2a+2a+40=380$.

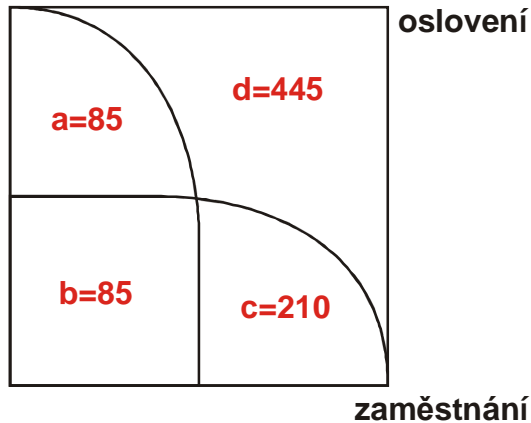
$$4a=340$$

$$a=85 \quad \Rightarrow \quad b=85$$

Dopočítáme c : $c=2a+40=2 \cdot 85+40=210$.

Zapíšeme počty do obrázku.

doma



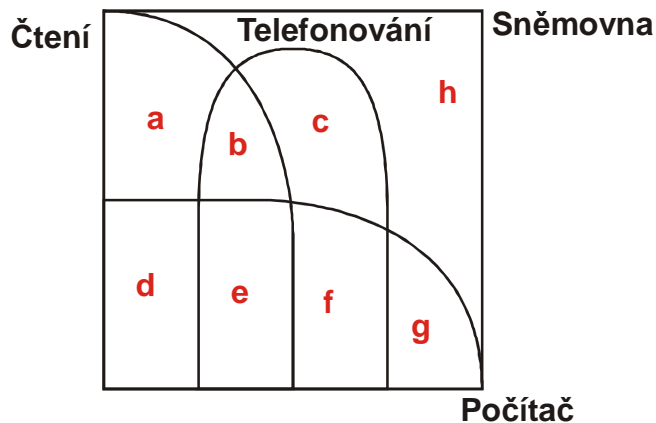
Nyní odpovíme na otázky.

Pouze v zaměstnání používá počítač 210 lidí (množina c).

Doma používá počítač 170 lidí (množiny a a b).

Pedagogická poznámka: Žáci, kteří mají s předchozím příkladem velké problémy, nemá cenu pouštět na následující příklad se třemi množinami. Účinnější je zadat jednodušší příklad ze sbírky.

- Př. 3:** Při jednání jedné nejmenované poslanecké sněmovny byl proveden průzkum pracovního vytížení přítomných poslanců. Bylo zjištěno, že kromě sledování průběhu projednávání zákona poslanci stíhají číst noviny, telefonovat a pracovat hry na notebooku. Noviny čte 34 poslanců, telefonuje jich 36 a prací s hrami se trápí 38 zastupitelů. Žádnou z těchto tří činností nevykonává a jednání sleduje 35 poslanců. Pouze dva poslanci pak stíhají všechny tři činnosti najednou. Čte a zároveň telefonuje 6 poslanců a 3 poslanci zároveň čtou a pracují si hry. Telefonuje nebo pracuje hry 65 poslanců. Urči, kolik poslanců:
- pouze telefonuje,
 - pracuje hry nebo čte,
 - dokáže vykonávat alespoň dvě z uvedených činností,
 - je přítomno jednání sněmovny.



Noviny čte 34	\Rightarrow	$a + b + d + e = 34.$
Telefonuje 36	\Rightarrow	$b + c + e + f = 36.$
Pracuje hry 38	\Rightarrow	$d + e + f + g = 38.$
Jednání sleduje 35	\Rightarrow	$h = 35.$
Všechny tři činnosti 2	\Rightarrow	$e = 2.$
Čte a zároveň telefonuje 6	\Rightarrow	$b + e = 6.$
Čte a pracuje si hry 3	\Rightarrow	$d + e = 3.$
Telefonuje nebo pracuje hry 65	\Rightarrow	$b + c + d + e + f + g = 65.$

Dosadíme z h a e do ostatních rovnic.

$$a + b + d + 2 = 34$$

$$b + c + 2 + f = 36$$

$$d + 2 + f + g = 38$$

$$b + 2 = 6$$

$$d + 2 = 3$$

$$b + c + d + 2 + f + g = 65$$

$$a + b + d = 32$$

$$b + c + f = 34$$

$$d + f + g = 36$$

$$b = 4$$

$$d = 1$$

$$b + c + d + f + g = 63$$

Určili jsme další dvě neznámé dosadíme do zbývajících rovnic.

$$a + 4 + 1 = 32 \Rightarrow a = 27$$

$$4 + c + f = 34 \Rightarrow c + f = 30$$

$$1 + f + g = 36 \Rightarrow f + g = 35$$

$$4 + c + 1 + f + g = 63 \Rightarrow c + f + g = 58$$

Zbývají tři rovnice.

$$c + f = 30$$

$$f + g = 35$$

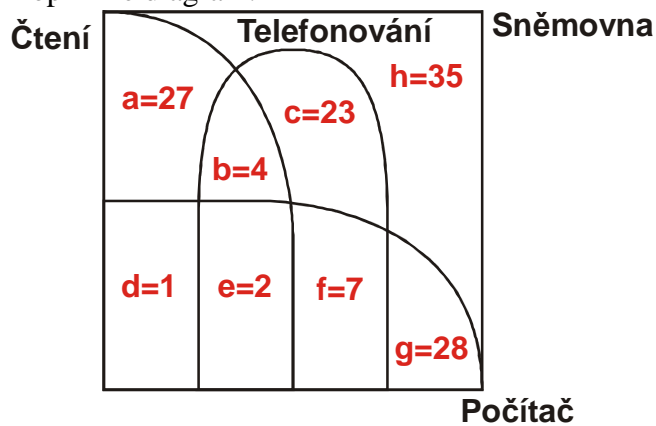
$$c + f + g = 58$$

Dosadíme za $c + f$ z první rovnice do třetí: $30 + g = 58 \Rightarrow g = 28$.

Dosadíme do druhé: $f + 28 = 35 \Rightarrow f = 7$.

Dosadíme do první: $c + 7 = 30 \Rightarrow c = 23$.

Doplníme diagram.



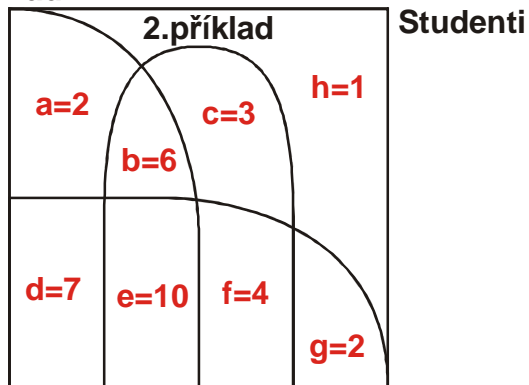
Poslanců, kteří pouze telefonují je 23 (množina c).

Poslanců, kteří pracují hry nebo čtou je 69 (množina $a + b + d + e + f + g$).

Poslanců, kteří dokážou vykonávat alespoň dvě z uvedených činností, je 14 (množina $b + d + e + f$).

Jednání sněmovny je přítomno 127 poslanců (množina $a + b + c + d + e + f + g + h$).

1.příklad



3.příklad

Alespoň dvě úlohy vyřešilo 27 studentů (množina $b + d + e + f$).

Alespoň jednu úlohu vyřešilo 34 studentů (množina $a + b + c + d + e + f + g$).

Př. 5: Další příklady ze sbírky.

Shrnutí: Při sestavování rovnic, které porovnávají počty, je výhodné si rozmyslet, která strana je větší.